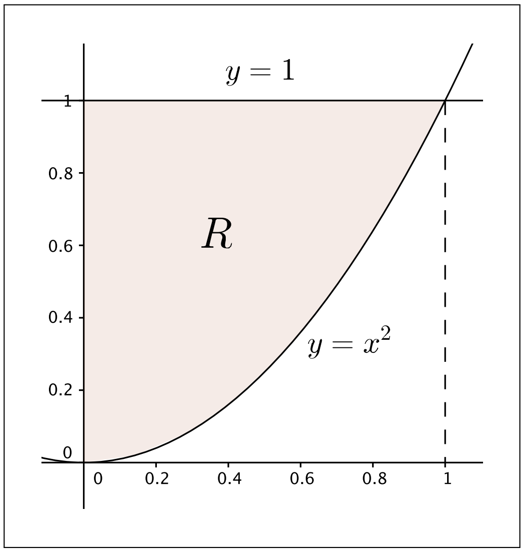
SOLUCIÓN PRUEBA N° 2 2016-1

1. (a) **Calcular** $I = \int_0^1 \int_{x^2}^1 \sqrt{y}\cos y\, dy\, dx$

Solución: La región de integración de I es:

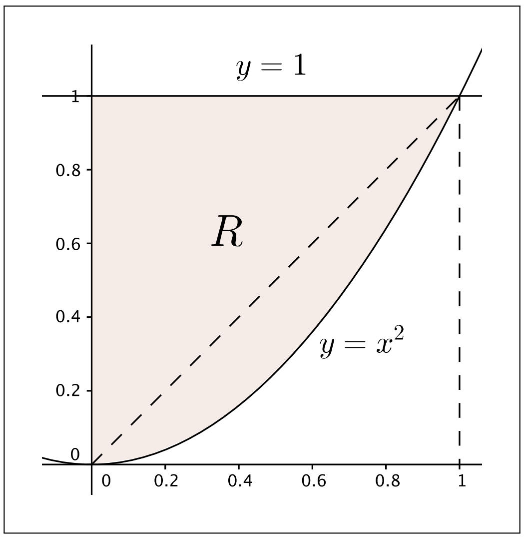


Luego haciendo un cambio de orden tenemos que

$$I = \underbrace{\int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} \sqrt{y}\cos y\, dx\, dy}_{5pts} = \int_0^1 y\cos y\, dy = y\sin y + \cos y \Big|_{y=0}^{y=1} = \underbrace{\sin(1) + \cos(1) - 1}_{5pts}$$

(b) Expresar el área de la región de integración de (a) en coordenadas polares

Solución:



$$A = \underbrace{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\csc\alpha} r\, dr\, d\alpha}_{5pts} + \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sin\alpha \sec^2\alpha} r\, dr\, d\alpha}_{5pts}$$

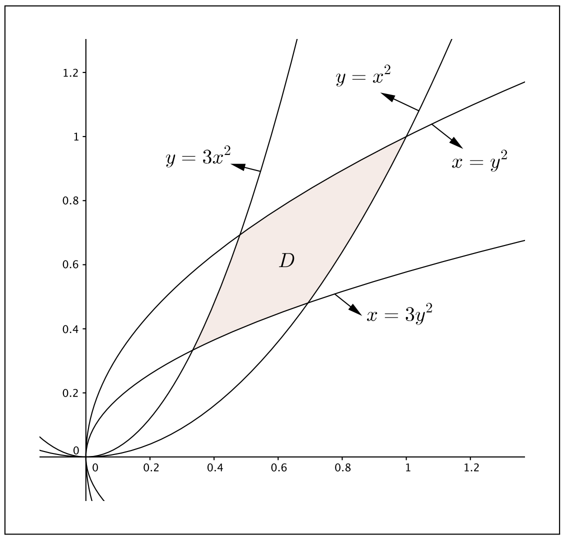
2. Sea la integral:

$$I = \iint\limits_D \frac{dA}{x^2y^2}$$

donde D es la region del primer cuadrante limitada por las gráficas de

$$y = x^2, \quad y = 3x^2, \quad x = y^2, \quad x = 3y^2$$

(a) Realizar la gráfica de la región D
Solución:



5 pts

(b) Realizando un cambio de coordenadas adecuado **calcular** el valor de I.

- $y = x^2 \iff \dfrac{y}{x^2} = 1$
- $y = 3x^2 \iff \dfrac{y}{x^2} = 3$
- $x = y^2 \iff \dfrac{x}{y^2} = 1$
- $x = 3y^2 \iff \dfrac{x}{y^2} = 3$

Haciendo $u = \dfrac{y}{x^2} \quad v = \dfrac{x}{y^2}$ se tiene que $1 \leq u \leq 3$ y $1 \leq v \leq 3$

- $J = \dfrac{1}{\begin{vmatrix} -2x^{-3}y & x^{-2} \\ y^{-2} & -2xy^{-3} \end{vmatrix}} = \dfrac{1}{3}x^2y^2$ 8 pts

  Luego:

$$I = \int_1^3 \int_1^3 \frac{1}{3}\, dv\, du = \int_1^3 \frac{2}{3}\, du = \frac{4}{3}$$

7 pts

3. (a) Expresar en coordenadas cilíndricas la integral

$$I = \iiint_R (x^2 + y^2)\, dV$$

donde R es la región del espacio acotado por:

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0, \quad x = 0, \quad y = x \quad z = 1$$

Solución:

$$I = \underbrace{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \int_0^1 r^3\, dz\, dr\, d\alpha}_{10pts}$$

(b) Expresar en coordenadas esféricas el volumen del sólido que se obtiene de la intersección del interior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y del interior del cilindro $x^2 + y^2 = 1$

Solución:

$$I = \underbrace{2\int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\csc\varphi} \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\alpha}_{5pts} + \underbrace{2\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^2 \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\alpha}_{5pts}$$